La publicación de notas y convocatoria de revisión se anunciarán a través de Moodle.

Ejercicio 1: Dado un sistema de representación en coma flotante donde los números máquina $\hat{x}$ se almacenan de la siguiente forma:

$$\hat{x} = (\pm 1.a_1a_2...a_m)2^e$$

$$e \in \{0,-1,-2,...,-n\} \qquad a_i \in \{0,1\} \forall i \qquad n,m > 0$$

Suponiendo que m=3 y n=2,

a) Escribir la representación $(\pm 1.a_1a_2...a_m)\cdot 2^e$ y el valor decimal de los siguientes números máquina:
- Valor mínimo mayor que cero (V_{min})
- Valor máximo (V_{max})
- Números reales 1 y 0.4

V_{min}=+1.000 2^{-2}=0.25
V_{max}=+1.111 2^{0}=1.875
1=+1.000 2^{0}=1.0
0.4= $(0.0110...)_2$ ~ +1.100 2^{-2}=0.375 (si truncamos)
0.4= $(0.0110...)_2$ ~ +1.101 2^{-2}=0.40625 (si redondeamos)

b) Calcular eps(1) y dar una cota del error relativo.

El siguiente valor representable al 1 es +1.001 2^0, luego eps(1) = +1.001 2^0 - +1.000 2^0 = 0.125 .
Además $eps(1) = 2^{-(M-1)}$ y en este caso M = m+1=3+1=4 y $eps(1) = 2^{-(3)} = 0.125$
La cota del error relativo es $\frac{eps(1)}{2} = 0.0625$

c) ¿Cuál es el error relativo al representar el número real 0.4? ¿Cuántas cifras decimales significativas se consiguen?

Para el número máquina obtenido truncando (0.375) el error relativo es:

$$Error\_relativo = \left|\frac{0.4-0.375}{0.4}\right| = 0.0625$$

$$Número\_cifras\_significativas = -\log 10(0.0625) \approx 1$$

d) Para cualquier m y n, ¿Cuántos números máquina se pueden representar?

Signos posibles: 2
Mantisas posibles: 2^m
Exponentes posibles : n+1

Total: 2 x 2^m x (n+1)

Ejercicio 2: (los 2 apartados son independientes)

a) Usando el método de Newton hallar el polinomio p(x) verificando que:

p(0) = 1, p(1)=0, p'(1)=-1, p(3)=2

xk	yk			
0	1			
		-1		
1	0		0	
		-1		1/3 ==> 1 - 1·x + 0·x·(x-1) +1/3 x·(x-1)^2
1	0		1	
		1		
3	2			

y el polinomio interpolador es $p(x) = 1 - x + \dfrac{x(x-1)^2}{3}$

b) Sea el espacio de funciones a trozos $u(x) = \begin{cases} a + bx + c\cdot\cos(x) & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ A + B\cdot\sin(x) & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

1) Dar la expresión de u(x) si exigimos que la función y su 1ª derivada sean continuas.

Continuidad de función en 0 : u(-->0) = a+c = A = u(0<--)
Continuidad de derivada en 0: u'(-->0) = b = B = u'(0<--)

Luego tenemos B=b y A= (a+c), quedando $u(x) = \begin{cases} a + bx + c\cdot\cos(x) & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ (a+c) + b\cdot\sin(x) & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

2) Dentro del espacio de funciones anteriores hallar la que interpola la siguiente tabla:

X	-π/2	0	π/2
Y	π/2	1	0

Imponiendo ahora las condiciones de la tabla:
$$\begin{aligned} u(-\pi/2) &= & a - b\pi/2 &= \pi/2 \\ u(0) &= & a + c &= 1 \\ u(\pi/2) &= & (a+c) + b &= 0 \end{aligned}$$

Restando 3ª - 2ª ecuaciones --> b = -1.
La 1ª ecuación queda a + π/2 = π/2 --> a =0
Finalmente de la 2ª ecuación (a+c) = 1, al ser a=0 --> c=1

La solución es a = 0, b = -1, c = 1 y por lo tanto $u(x) = \begin{cases} -x + \cos(x) & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 1 - \sin(x) & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Ejercicio 3: Se quiere resolver el problema de ajustar por mínimos cuadrados los datos de la tabla:

x_i	-1	0	1	2
f_i	-2	-1	0	3

con funciones racionales de la forma: $y(x) = \dfrac{A+Bx}{1+Cx^2}$

que verifiquen que su recta tangente en el origen tiene pendiente unidad (y'(0)=1)

Imponer la condición previa, linealizar el problema y escribir en forma matricial el sistema sobredeterminado resultante. Indicad las ecuaciones normales a resolver.

Nota: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\right) = \dfrac{y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)}{\left(y_2(x)\right)^2}$

Imponemos la condición/restricción $y'(0) = 1$

$$y'(x) = \frac{B(1+Cx^2) - (A+Bx)2Cx}{(1+Cx^2)^2}, \qquad si\ y'(0) = 1 \rightarrow \ B = 1$$

La función racional para realizar el ajuste queda como:

$$y = \frac{A+x}{1+Cx^2}$$

Esta función debe aproximar los datos de la tabla, es decir:

$$y(x_i) \approx f_i \ \Rightarrow \frac{A+x_i}{1+C{x_i}^2} \approx f_i;\ i = 1,2,3,4$$

El problema se puede linealizar en la forma, no única, siguiente:

$$A + x_i \approx f_i(1+C{x_i}^2) \Rightarrow A - (f_i{x_i}^2)C \approx f_i - x_i;\ i = 1,2,3,4 \ ,$$

que expresado que en forma matricial como un sistema sobredeterminado es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones normales a resolver (para un ajuste por mínimos cuadrados) para calcular $A\ y\ C$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que son las mismas que se obtienen si se minimiza respecto a $A\ y\ C$ la función:

$$E = \sum_{1}^{4} \left(A - (f_i{x_i}^2)C - (f_i - x_i)\right)^2$$